تابع

مسافت بین خانه تا مدرسه را در چه زمانی بصورت پیاده روی طی می کنید؟ مسافت بین خانه تا فروشگاه نزدیک خانه را در چه زمانی طی می کنید؟ تفاوت بین زمانی که یک مسافت کوتاه را می پیمائید با زمانی که یک مسافت بیشتر را می پیمائید چقدر است؟ فرض کنیم مسیر خانه تا مدرسه را هر روز در 15 دقیقه طی می کرده اید، اگر مدرسه خیلی دورتر شود و مسافت سه برابر شود با چه زمانی از خانه به مدرسه می رسد؟ همانطور که می بینید اگر طول مسیر (مسافت) را تغییر دهیم، زمان لازم برای طی آن مسیر هم تغییر می کند. یعنی زمان لازم برای طی مسیر از طول مسیر *تبعیت* می کند. اگر مسیر طولانی تر باشد، زمان هم بیشتر می شود و برعکس اگر مسیر کوتاهتر باشد، زمان کمتری برای طی آن لازم است. زمان برای مسیرهای متفاوت متغیر است. طول مسیر هم بسته به اینکه قصد داریم کجا برویم تغییر می کند. به ویژگی زمان که برای مسیر های مختلف متغیر است، می گوییم "متغیر زمان" و به طول مسیر که برای مسیرهای متفاوت متغیر است، می گوییم "متغیر طول". از آنجاییکه متغیر زمان از متغیر طول *تبعیت* می کند (یعنی وقتی طول بیشتر می شود زمان هم بیشتر می شود و وقتی طول کمتر می شود زمان هم کمتر می شود) می گوییم زمان *تابع* طول مسیر است، یعنی اگر مسیر را تغییر دهیم زمان هم تغییر می کند. برای کوتاه تر کردن جملات و خلاصه نویسی به طول مسیر می گوییم x و به زمان می گوییم y. بنا براین عبارات و جملات بالا به این صورت در می آیند (عبارات و جملاتی که با رنگ سبز نوشته شده اند): "متغیر y" ، "متغیر x" ، y تابع x است.

توجه کنید که کلمه تابع یعنی تبعیت کردن. Y تابع x است، یعنی تغییرات y از تغییرات x تبعیت می کند، با تغییرات y وابسته به تغییرات x است. بنابراین به y متغیر وابسته هم می گویند.

برای روشن شدن بیشتر مطلب، فرض کنیم که هر یک کیلومتر مسافت را در 6 دقیقه طی می کنیم. بنابراین اگر طول مسیر 5 کیلومتر باشد، 35 دقیقه طول می کشد که آن را طی کنیم. اگر طول مسیر 2 کیلومتر باشد، در چند دقیقه آن را طی می کنیم؟ اگر 3.5 کیلومتر باشد چطور؟ برای جواب هر کدام کافی است که مقدار طول (یا x) را در 6 دقیقه ضرب کنیم تا زمان (یا y) بدست بیاید. اگر بصورت نماد و ریاضیاتی بخواهیم این کار (یعنی ضرب کردن طول در 6) را بنویسیم، یک عبارت بصورت زیر بدست می آید:

$$y = 6 \times x$$

به این شکل نوشتن مفاهیم فرمول نویسی می گویند.

این فرمول به این صورت خوانده می شود: تغییرات y از تغییرات x تبعیت می کند (یا y تابع x است). دقیق تر این است که بگوییم: تغییرات y شش برابر تغییرات x است. یا y شیش برابر x است. مثلا اگر x (طول مسیر) 2 کیلومتر باشد، y (زمان) برابر 12 دقیقه است، اگر x 7 کیلومتر باشد y برابر 42 دقیقه است.

در این مثال که ارائه شد، x می تواند چه مقادیری داشته باشد؟ یعنی طول مسیر چه مقادیری می تواند باشد. جواب تا حدودی مشخص است، هر مسیری را که بتوان پیاده روی کرد را می توان به عنوان مقدار x در نظر گرفت. برای مثال دور از ذهن است که بگوییم مسیری که پیاده روی کردیم یک میلیمتر است. فرض کنیم کمترین مسافت را یک قدم در نظر بگیریم و مسیر ها کمتر از نیم متر (که برابر 0.0005 کیلومتر است) نباشد. و فرض کنیم که حداکثر مسیر ممکن برای پیاده روی 50 کیلومتر باشد. به مجموعه ی این مقادیر که می توانیم به جای x قرار دهیم، دامنه تابع می گویند و با حرف D نشان می دهند. یعنی دامنه تابع برابر است با فاصله زیر:

$$D = [0.0005,50]$$

همه جواب هایی که ممکن است برای y بدست بیاید را برد تابع می گویند و با R نشان می دهند. اگر مقدار 0.0005 را به جای x قرار دهیم، برای y مقداری برابر با 0.0030 بدست می آید. اگر به جای x مقدار 50 را قرار دهیم، برای y مقدار 50*6 یعنی 300 بدست می آید.

$$R = [0.003,300]$$

مثال- برای تابع زیر که دامنه و برد را مشخص کنید

$$f(x) = 1 - \sqrt{x}$$

توجه کنید که f(x) یعنی تابعی از x. (حرف f اول کلمه انگلیسی function به معنای تابع است). در حقیقت f(x) جانشین همان y در فرمول بالا (فرمول زمان پیاده روی) شده است.

برای بدست آوردن دامنه تابع بالا باید بدانیم که چون شرایط خاصی مثل مثال پیاده روی گذاشته نشده است، پس هر مقداری از مجموعه اعداد حقیقی که شرایط مساعد ریاضیاتی داشته باشد را می توان جزو دامنه تابع دانست. در این تابع این شرط باید برقرار باشد که " مقدار زیر رادیکال دوم باید منفی نباشد" یعنی مقدار x نباید منفی باشد، بنابراین:

$$x \nless 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in [0, +\infty)$$

بنابراین دامنه تابع برابر است با فاصله ی $[0, +\infty)$.

برد تابع:

اگر مقدار x به ترتیب برابر با 1 و 100 و 10000 و 1000000 باشد مقدار تابع چقدر می شود؟

$$f(1) = 1 - \sqrt{1} = 1 - 1 = 0$$

$$f(10) = 1 - \sqrt{100} = 1 - 10 = -9$$

$$f(10000) = 1 - \sqrt{10000} = 1 - 100 = -99$$

$$f(1000000) = 1 - \sqrt{1000000} = 1 - 1000 = -999$$

هرچه x بزرگتر باشد مقدار $\sqrt{x}$ بزرگتر می شود و مقدار $-\sqrt{x}$ کوچکتر می شود و مقدار $1-\sqrt{x}$ کوچکتر می شود. چون x تا بینهایت ادامه دارد پس نمی توانیم کوچکترن مقدار تابع را با عدد خاصی مشخص کنیم. پس کمترین مقدار تابع را با $-\infty$ نشان می دهیم (منفی بینهایت) .

چون مقدار $\sqrt{x}$ همیشه مثبت است بنابراین مقدار تابع (یعنی $1-\sqrt{x}$) همیشه کمتر یا مساوی 1 است. کمترین مقدار x برابر با صفر است (طبق دامنه بدست آمده)، اگر x صفر باشد مقدار تابع بزرگترین مقدار ممکن است که برابر با

$$f(x) = 1 - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1$$

پس برد تابع برابر است با فاصله ی $(-\infty, 1]$

$$R = (-\infty, 1]$$

مثال- برای تابع زیر که دامنه و برد را مشخص کنید

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

در این تابع می دانیم که مخرج کسر نباید صفر باشد، زیرا همانطور که قبلا گفته شده است، تقسیم عدد بر صفر بی معنی و تعریف نشده است. بنابراین اعدادی که اگر جای x قرار داده شوند باعث می شوند مخرج کسر برابر با صفر شود را از دامنه (مجموعه اعداد حقیقی) حذف می کنیم.

$$\sqrt{1 - x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2} = \sqrt{1} \;\Rightarrow\; |x| = 1$$

$$\Rightarrow\; x_1 = 1 \;,\; x_2 = -1$$

بنابراین اعداد 1 و -1 جزو دامنه تابع نیستند (چون اگر جای x قرار داده شوند باعث می شوند که مخرج کسر برابر با صفر شود).

شرط دومی که لازم است رعایت شود اینست که مقدار زیر رادیکال نباید منفی باشد (چون رادیکال دوم اعداد منفی در مجموعه اعداد حقیقی وجود ندارد).

$$1 - x^2 < 0 \;\Rightarrow\; x^2 > 1 \;\; \sqrt{x^2} > \sqrt{1} \;\Rightarrow\; |x| > 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\epsilon\left(1 , +\infty\right) \\ x \in \left(-\infty , -1\right) \end{cases}$$

بنابراین مقدار x نمی تواند جزو فاصله های بدست آمده در بالا باشد. پس دامنه تابع برابر است با فاصله زیر:

$$D = (-1,1)$$

یعنی x فقط می تواند مقداری حقیقی بین 1- و 1 باشد.

برای بدست آوردن برد این تابع، می دانیم که مقدار این کسر به مخرجش که همیشه مثبت است وابسته است. هرچه مقدار مخرج کسر کمتر باشد مقدار تابع بزرگتر است و برعکس. مقدار عبارت x^2 همیشه مثبت است و وقتی این مقدار را از یک کم کنیم (یعنی $1 - x^2$) مقدار زیر رادیکال همیشه کمتر از یک است بجز وقتی که مقدار x^2 برابر با صفر باشد. در صورتی که مقدار x^2 برابر با صفر باشد، مقدار زیر رادیکال برابر با 1 خواهد بود،بنابراین بزرگترین مخرج کسر 1 است، و کوچکترین مقدار تابع برابر با 3 تقسیم بر 1 می شود. هرچه مقدار x به 1 یا 1- نزدیک باشد مقدار x^2 بزرگتر و بنابراین مقدار مخرج کوچکتر می شود. اگر x بسیار به 1 یا 1- نزدیک شود مقدار زیر رادیکال بسیار نزدیک به صفر می شود و مقدار کل کسر بزرگتر می شود. بنابراین هرقدر که مقدار مخرج به صفر نزدیکتر شود مقدار کل کسر بزرگتر و بزرگتر می شود و هیچ انتهایی نخواهد داشت. پس مجموعه برد تابع برابر با فاصله نامحدود زیر است:

$$R = [3, +\infty)$$

معادله خط، دایره و سهمی

معادله خط

آیا رابطه خاصی بین خط با معادله Ax+By=c1 و خط Bx-Ay=c2 وجود دارد؟

$$1 - \quad Ax + By = c_1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x + \frac{c_1}{B} \quad \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{A}{B}$$

$$2 - \quad Bx - Ay = c_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{B}{A}x - \frac{c_2}{B} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{B}{A}$$

چون شیب این دو خط معکوس و علامت شیب های آنها مخالف همدیگر است، پس این دو خط برهم عمودند.

آیا رابطه خاصی بین خط با معادله Ax+By=c1 و خط Ax+By=c2 وجود دارد؟

$$1- \quad Ax + By = c_1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x + \frac{c_1}{B} \quad \Rightarrow \quad m_1 = -\frac{A}{B}$$
$$2- \quad Ax + By = c_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{A}{B}x - \frac{c_2}{B} \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{A}{B}$$

چون شیب این دو خط باهم برابر است، پس این دو خط باهم موازی هستند.

معادله دایره

معادله دایره ای با مرکز a(x1,y1) و شعاع r بصورت زیر است.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره زیر را پیدا کنید.

$$x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$$

حل:

$$x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \left[y^2 - 3y + \left(\frac{9}{4}\right)\right] - (\frac{9}{4}) - 4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} = (\frac{5}{2})^2$$

پس مختصات مرکز این دایره نقطه (3/2و0) است و شعاع آن برابر است با 5/2 .

یک نامعادله بنویسید که جواب آن تمام نقاط داخل و روی دایره ای به شعاع 3/2 و مرکز (1-و2) را شامل شود.

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 \le (\frac{3}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 \le \frac{9}{4}$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y \le -\frac{11}{4}$$

از علامت کمتر مساوی استفاده کردیم تا نقاط داخل (کمتر) و نقاط روی دایره (مساوی) را شامل شود.

معادله سهمی

معادلات با شکل کلی زیر که در آنها a برابر صفر نباشد را معادله سهمی می گویند. نمودار این معادلات بصورت یک سهمی است.

$$y = ax^2 + bx + c$$

اگر مقدار a مثبت باشد دهانه سهمی رو به بالا باز است و اگر منفی باشد دهانه سهمی رو به پائین باز است. هرچه مقدار قدرمطلق a کوچکتر شود دهانه سهمی بازتر می شود و هرچه بزرگتر باشد، دهانه سهمی تنگ تر می شود. هر سهمی با معادله شبیه بالا یک خط تقارن دارد که از راس سهمی می گذرد. معادله این خط تقارن که یک خط عمودی می باشد بصورت زیر است.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

نکته مهم: اگر مقدار x بدست آمده از طریق این فرمول (منفی b تقسیم بر دوa) مثبت باشد یعنی راس سهمی در سمت راست محور yها قرار دارد و اگر منفی باشد یعنی راس سهمی در سمت چپ محور yها قرار دارد. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی راس سهمی روی محور yها قرار دارد. مقدار این عبارت وقتی صفر می شود که مقدار b صفر باشد. بنابراین اگر مقدار b صفر باشد، محور yها می شود خط تقارن سهمی و راس سهمی روی محور yها می افتد.

هر سهمی محور yها را در نقطه (0وc) قطع می کند. همچنین هر سهمی محور xها را در نقاط زیر(در صورت وجود) قطع می کند.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$